

空气动力学基础期中大作业报告《重点》

阅前说明

本文档为本次大作业的主报告。

第一部分：基本信息

题目：NACA4412的数值计算结果

作者信息：张启民 2300098603

目录

- 第一部分：基本信息
- 第二部分：选择路径
- 第三部分：NACA4412的气动系数

第二部分：选择路径

1. 线涡强密度 γ_i 的取值分布

在涡面法的数值离散过程中，对微元面上线涡强密度 γ 的分布假设直接决定了计算的精度。本程序采用了线性分布假设。具体而言，假设第 j 个微元面由节点 j 和节点 $j+1$ 构成，微元面的总长度为 l_j 。定义局部坐标 s 沿着微元面从0变化到 l_j ，则该微元面上的局部线涡强密度 $\gamma(s)$ 可以表示为两端节点线涡强密度 γ_j 和 γ_{j+1} 的线性插值：

$$\gamma(s) = \gamma_j + \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{l_j} s$$

2. 代码的结构

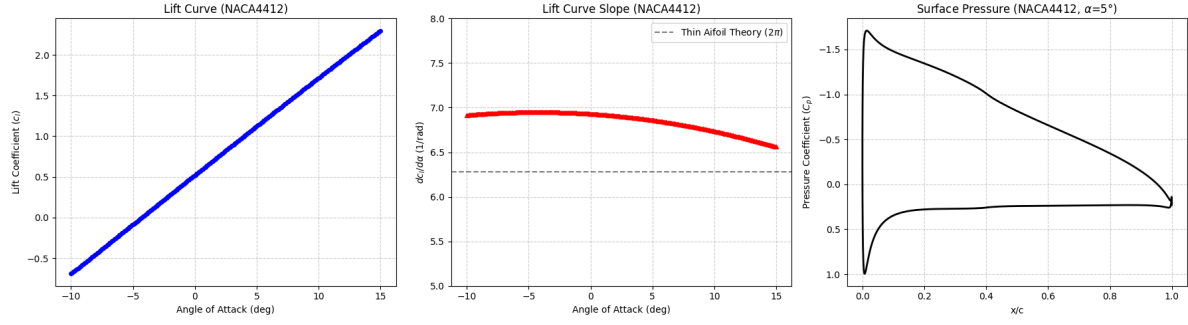
本程序基于Python构建，将复杂的流场求解过程精简为以下五个核心功能模块：

- 几何生成模块 (geometry)**：基于NACA 4位数方程，计算并返回翼型表面的精确空间坐标。
- 网格离散模块 (meshing)**：采用半余弦划分法翼型表面进行节点离散，并计算各微元面的控制点与法向量。
- 矩阵组装模块 (P_mat, setup)**：基于Biot-Savart定律的积分解析解与尾缘Kutta条件，计算并组装全局空气动力学影响系数矩阵 $[A]$ 。
- 方程求解模块 (solve)**：结合来流边界条件构建方程右端向量 $[B]$ ，并求解线性方程组 $[A][\gamma] = [B]$ ，得出各节点的线涡强密度分布。
- 气动后处理模块 (coefficients, plotting 等)**：对求解的线涡强密度进行沿程积分计算升力系数 C_L 与压力系数 C_p ，并输出最终的可视化气动图表。

第三部分：NACA4412的气动系数

1. 一般攻角下的气动系数

基于前文建立的涡面法数值计算程序，以下给出了 NACA 4412 翼型在不可压缩无粘流场中的求解结果。



根据经典薄翼理论，升力线斜率 $dC_L/d\alpha$ 理论上应为一个常数（约为 2π ）。然而，基于上述涡面法程序的数值计算结果表明，实际斜率并非定值，且在数值上与 2π 存在明显的偏差。产生这一物理现象与数值差异的深层原因剖析如下：

$c_l - \alpha$ 曲线斜率推导计算

正如我们之前推导的，涡面法的系统方程为 $[A][\gamma] = [B]$ 。

提取出方程右侧向量 $[B]$ 与攻角 α 之间的三角函数关系：

$$[B] = -[n_x] \cos \alpha - [n_y] \sin \alpha$$

（注： $[n_x]$ 和 $[n_y]$ 为控制点法向量构成的列向量，最后一行 Kutta 条件处的值为 0）

对方程两边左乘逆矩阵 $[A]^{-1}$ ，得到无量纲线涡强密度向量 $[\gamma_{nondim}]$ ：

$$[\gamma_{nondim}] = \underbrace{(-[A]^{-1}[n_x])}_{[C]} \cos \alpha + \underbrace{(-[A]^{-1}[n_y])}_{[S]} \sin \alpha$$

由此，我们定义了两个纯几何向量（它们仅与网格划分有关，完全独立于攻角）：

$$[C] = -[A]^{-1}[n_x] \quad , \quad [S] = -[A]^{-1}[n_y]$$

将无量纲线涡强密度 $\gamma_{i,nondim} = C_i \cos \alpha + S_i \sin \alpha$ 代入升力系数的离散积分公式

$C_L = \sum_{i=1}^{n-1} l_i (\gamma_{i,nondim} + \gamma_{i+1,nondim})$ 中：

$$C_L = \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n-1} l_i (C_i + C_{i+1}) \right]}_{K_1} \cos \alpha + \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n-1} l_i (S_i + S_{i+1}) \right]}_{K_2} \sin \alpha$$

根据辅助角公式 $K_1 \cos \alpha + K_2 \sin \alpha = K_0 \sin(\alpha + \alpha_{L=0})$ ，最终的解析式为：

1. 最大升力理论幅值 K_0 ：

$$K_0 = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$$

2. 零升力攻角 $\alpha_{L=0}$ ：

$$\alpha_{L=0} = \arctan \left(\frac{K_1}{K_2} \right)$$

对上述精确的 c_l 函数关于攻角 α 求导，即可得到真实的升力线斜率公式：

$$\frac{dc_l}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}[K_0 \sin(\alpha + \alpha_{L=0})] = K_0 \cos(\alpha + \alpha_{L=0})$$

由数学推导表明，升力线斜率 $dc_l/d\alpha$ 本质上是一个余弦函数，而不是一个常数。

```
def calculate_analytical_K0():
    print("-----")
    nx_vec = np.zeros(npts)
    ny_vec = np.zeros(npts)
    nx_vec[:npts-1] = Normal[:, 0]
    ny_vec[:npts-1] = Normal[:, 1]

    C_vec = np.linalg.solve(Amat, -nx_vec)
    S_vec = np.linalg.solve(Amat, -ny_vec)

    K1 = 0.0
    K2 = 0.0
    for i in range(npts-1):
        x1, y1 = Points[i,0], Points[i,1]
        x2, y2 = Points[i+1,0], Points[i+1,1]
        li = np.sqrt((x2-x1)**2 + (y2-y1)**2)

        K1 = K1 + li * (C_vec[i] + C_vec[i+1])
        K2 = K2 + li * (S_vec[i] + S_vec[i+1])

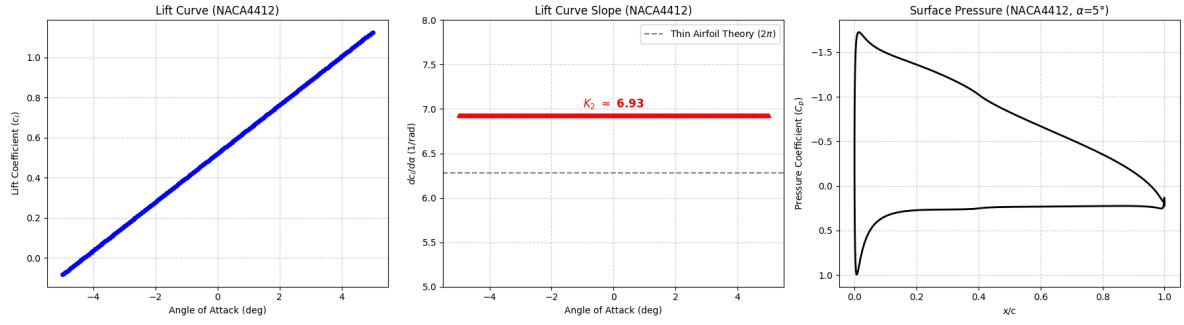
    K0 = np.sqrt(K1**2 + K2**2)
    alpha_L0_rad = np.arctan2(K1, K2)
    alpha_L0_deg = np.degrees(alpha_L0_rad)

    print(f"K1 = {K1:.6f}")
    print(f"K2 = {K2:.6f}")
    print(f"K0 = {K0:.6f}")
    print(f"alpha_L=0 = {alpha_L0_deg:.4f} 度")
    print("-----")

    return K0, alpha_L0_deg

#####翼型型号NACA4412的计算结果#####
K1 = 0.521064
K2 = 6.931321
K0 = 6.950879
alpha_L=0 = 4.2991度
```

2.小攻角假设下的气动系数 ($|\alpha| \leq 5^\circ$)



在小攻角假设下：

$$\cos(\alpha) \approx 1$$

$$\sin(\alpha) \approx \alpha$$

那么升力系数可以表示为：

$$c_l = K_1 \cos \alpha + K_2 \sin \alpha \approx K_1 + K_2 \alpha$$

简单的对 α 求导，可以得出

$$\frac{dc_l}{d\alpha} = K_2 \approx 6.931321$$

以上的图验证了本次推导。